



ESPECIFICACIONES TÉCNICAS CARTOGRAFÍA BÁSICA

ANEXO 4 OBTENCIÓN DE ALTURAS SOBRE EL NIVEL MEDIO DEL MAR A PARTIR DE INFORMACIÓN GNSS



Contenido

1. Metodología en campo	3
2. Metodología en oficina	6
3. Ejemplos numéricos:	8

El alcance del presente anexo corresponde al empleo del sistema de posicionamiento global GNSS en la extensión del control vertical sobre aquellas zonas en donde no se cuenta con puntos de nivelación y la precisión requerida está dentro del orden trigonométrico. Las posibilidades de operatividad en cualesquiera hora, condiciones climáticas y del relieve permiten que el sistema GNSS, unido a un modelo geoidal de alta resolución, sea una herramienta poderosa y económica en la determinación de nuevos puntos de referencia para propósitos geodésicos o topográficos. La presente sección tiene por objeto proporcionar orientación acerca del trabajo de campo y oficina, necesarios para la obtención de alturas equivalentes a las niveladas.

1. Metodología en campo

Antes de exponer algunos posibles casos a resolver, es necesario puntualizar sobre aspectos básicos del rastreo:

- a. El tiempo mínimo de rastreo sobre un punto debe ser de 15 minutos contados a partir de la estabilización del equipo y la disponibilidad mínima de 4 satélites.
- b. Por cada kilómetro de distancia a la base se hacen 5 minutos adicionales. En casos en que la configuración del sistema sea excelente, el tiempo adicional por cada kilómetro puede reducirse a 3 minutos.
- c. No debe haber tiempos de rastreo menores que 18 minutos.
- d. Debe evitarse realizar rastreos sobre distancias mayores a 20 km. En los casos en que estas condiciones no se puedan cumplir, es necesario aumentar los tiempos de rastreo de acuerdo con lo planteado en el ítema.
- e. Se sugiere, como una forma de mejorar los resultados, ejecutar rastreos dobles sobre cada punto.
- f. Los NPs ocupados deben ser, preferiblemente, de primer orden.

Caso 1. PUNTO: Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar (snmm) a partir de información GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente).

- a. Se toma como base inicial el punto MAGNA-SIRGAS más cercano al área del proyecto.
- b. Se seleccionan al menos dos estaciones de nivel NP a las cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en el ítem a. De este modo, se definen valores de latitud, longitud, altura elipsoidal (h), altura snmm (H) y ondulación geoidal (N) a partir del modelo GEOCOL (vigente) para cada NP y el punto base (figura 1).

- c. Los dos NPs rastreados servirán como base para la determinación de cota del punto nuevo con altura desconocida (rover).

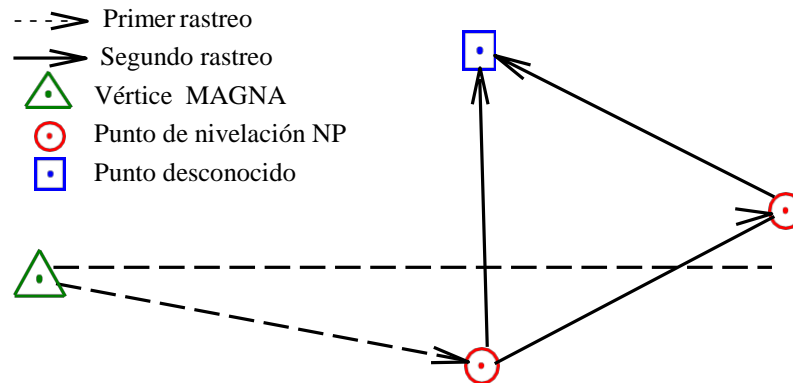


Figura 1. Determinación de la altura de un punto sobre el nivel medio del mar a partir de datos GNSS.

Los criterios de planeación y tiempos de rastreo se mantienen y la selección de la base estará en función de las conveniencias del proyecto. Los datos que deben utilizarse en oficina para obtener la altura snmm por medio de GNSS (H_{GNSS}) del punto nuevo son: Altura elipsoidal (h) del vértice geodésico, de los NPs y del punto nuevo; altura nivelada (H) de los NPs, y la ondulación geoidal (N GEOCOL) de todos los puntos involucrados.

Caso 2. PERFIL: Determinación de alturas snmm para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil a partir de información GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente).

- Se toma como base inicial el punto MAGNA-SIRGAS más cercano al área del proyecto.
- Se selecciona un NP al cual se le traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en el ítem a, definiéndole valores de latitud, longitud, altura elipsoidal (h), altura snmm (H) y ondulación geoidal (N) a partir del modelo GEOCOL (vigente). Este NP se constituye en la nueva base para el rastreo del perfil.
- Para rastrear el perfil es necesario dividirlo en circuitos, cuyas longitudes se

definen por la distancia horizontal entre la base y las estaciones ubicadas dentro de los siguientes 20 km. Alcanzada esta distancia, debe definirse una nueva base, la cual es el último punto del circuito inmediatamente anterior (figura 2).

- d. En el proceso se repiten los pasos b y c hasta finalizar la línea.
- e. El último punto rastreado en el proyecto debe ser un NP de tipo geodésico.

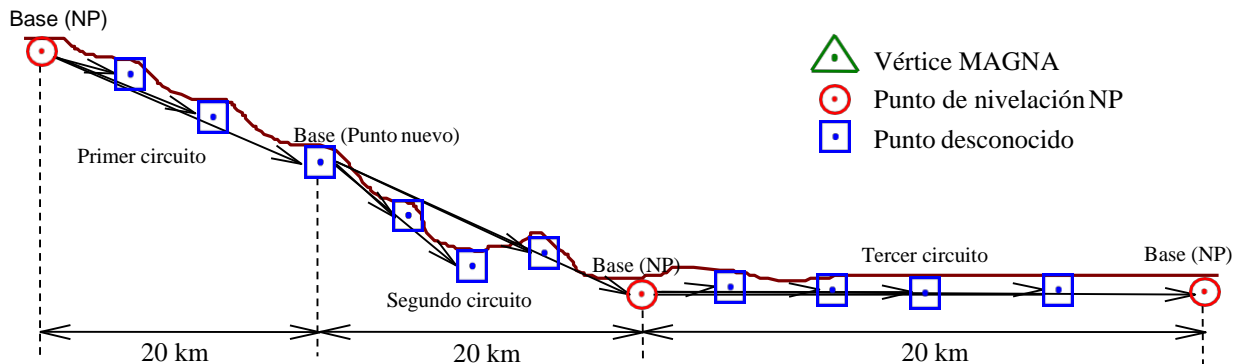


Figura 2. Determinación de la altura snmm a partir de datos GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente) para los puntos contenidos en un perfil.

Si existen más NPs cercanos al área del proyecto, éstos deben involucrarse como bases en el rastreo de los diferentes circuitos.

Los datos que se utilizan en oficina para calcular la altura snmm a partir de información GNSS (H_{GNSS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL) de todos los puntos ocupados y la altura nivelada (H) de los puntos NP.

Caso 3. SUPERFICIE: Determinación de alturas snmm a partir de información GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente) para puntos distribuidos en un área.

- a. Se toma como base inicial el punto MAGNA-SIRGAS más cercano al área del proyecto.
- b. Se seleccionan por lo menos cuatro (4) NPs, a los cuales se les traslada el control horizontal a partir del vértice seleccionado en el ítem a, definiéndoles valores de latitud, longitud, altura elipsoidal (h), altura nivelada (H) y la ondulación geoidal (N) a partir del modelo GEOCOL (vigente). Estos NPs se constituyen en las nuevas bases para el rastreo de los puntos contenidos en la superficie (figura 3).
- c. De acuerdo con las condiciones locales, se determinará la distribución de los

puntos a rastrear por cada día, manteniendo las especificaciones básicas de duración y distancia.

- d. Para cada día, es necesario que la base tenga altura definida sobre el nivel medio del mar.

Una superficie puede considerarse como un conjunto de perfiles, cuyas bases y puntos finales deben ser NPs.

Los datos que permiten obtener la altura snmm por medio de GNSS (H_{GNSS}) de los puntos nuevos son: Altura elipsoidal (h) y ondulación geoidal (N GEOCOL) de todos los puntos utilizados y la altura nivelada (H) de los puntos NP.

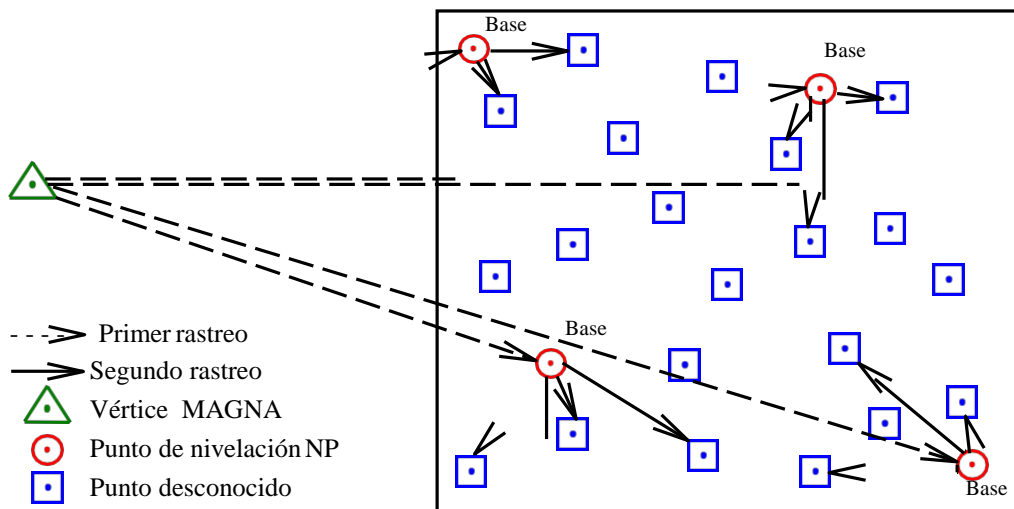


Figura 3. Determinación de la altura snmm a partir de información GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente) para puntos distribuidos en un área.

2. Metodología en oficina

Una vez recopilada la información en campo y procesadas las coordenadas MAGNA-SIRGAS, latitud (φ), longitud (λ) y altura elipsoidal (h), de cada estación rastreada, la determinación de alturas snmm a partir de datos GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente) puede hacerse según el siguiente procedimiento:

- a. Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes:

$$\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base} \quad (1)$$

- b. Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes:

$$\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base} \quad (2)$$

- c. Determinación de las diferencias de alturas snmm GNSS (ΔH_{GNSSi}) entre la base y sus rover correspondientes:

$$\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i \quad (3)$$

- d. Cálculo de las alturas snmm iniciales (H°_{GNSSi}) de los puntos desconocidos:

$$H^{\circ}_{GNSSi} = H_{Base} + \Delta H_i \quad (4)$$

- e. Determinación de las diferencias de alturas snmm GNSS iniciales (H°_{GNSSi}) entre estaciones consecutivas:

$$\Delta H^{\circ}_{GNSS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1} \quad (5)$$

éstas deben ser ajustadas a partir de los valores de altura nivelados en las bases.

- f. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GNSS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

$$\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0 \quad (6)$$

Siendo:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{W} \quad (7)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} - \mathbf{BL}^b \quad (8)$$

donde:

$\mathbf{B} = b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición, $\mathbf{P} = p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones, $\mathbf{L} = l_{m,1}$: Vector de las observaciones, $\mathbf{C} = c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición y $\mathbf{V} = (v_i)_{(i=1,2,\dots,n)}$: Vector de las desviaciones de las cantidades observadas.

- g. Determinación de las alturas snmm finales para los puntos nuevos:

$$H_{GNSS-Final} = H_{Nivelada\ de\ la\ base} + \Delta H_i \text{ Ajustado} \quad (9)$$

Debe tenerse presente que la precisión de las alturas así obtenidas está en torno a los 80 cm.

3. Ejemplos numéricos:

A continuación se presenta un ejemplo, del procesamiento de datos en oficina, por cada uno de los casos citados en la metodología de campo.

Caso 1. PUNTO: Determinación de la altura de un punto snmm a partir de Información GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente).

Se desea conocer la altura snmm del punto geodésico TG13 a partir del vértice CODAZZI y los NPs 6E1, B9S1, 86CM14 y 90CM14. Las coordenadas MAGNA-SIRGAS de éstos ya han sido calculadas y ajustadas. Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla 1.

Tabla 1. Alturas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm de un punto a partir de datos GNSS (Caso 1).

Punto	Altura elipsoidal (h)	Altura GEOCOL (N)	Altura nivelada
Vértice CODAZZI	2610,8160 m	21,5668 m	2588,5523 m
NP 6E1	2697,2876 m	20,9002 m	2673,2700 m
NP B9S1	2580,7914 m	20,8347 m	2557,3867 m
NP 86CM14	2575,7611 m	20,9812 m	2552,5900 m
NP 90CM14	2577,5087 m	20,9799 m	2553,9538 m
Punto TG13	3217,8420 m	21,5469 m	A determinar

- Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales del punto de cálculo y las estaciones con altura conocida: $\Delta h_i = h_{TG13} - h_{NPi}$ (tabla 2)
- Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre el punto de cálculo y las estaciones con altura conocida: $\Delta N_i = N_{TG13} - N_{NPi}$ (tabla 2).
- Determinación de las diferencias de alturas snmm provenientes del GNSS (ΔH_{GNSSi}) entre el punto de cálculo y las estaciones con altura conocida: $\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$ (tabla 2).

Tabla 2. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm de un punto a partir de datos GNSS (Caso 1).

Estaciones	$\Delta h_i = h_{TG13} - h_{NPi}$	$\Delta N_i = N_{TG13} - N_{NPi}$	$\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i -$
TG13 - CODAZZI	607,0260 m	-0,0199 m	607,0459 m
TG13 - NP 90CM14	640,3333 m	0,5670 m	639,7663 m
TG13 - NP B9S1	637,0506 m	0,7122 m	636,3384 m
TG13 - NP 6E1	520,5544 m	0,6467 m	519,9077 m
TG13 - NP 86CM14	642,0809 m	0,5657 m	641,5152 m

Una vez determinadas las alturas relativas entre el punto desconocido (TG13) y las estaciones con valor de altura, el problema se representa esquemáticamente (figura 4) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

- d. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GNSS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Formulación de las ecuaciones de condición:

La cantidad de ecuaciones de condición que deben plantearse es igual al número de estaciones con altura conocida (5) menos el número de estaciones con altura desconocida (1), en este caso deben formularse cuatro (4) ecuaciones:

$$\begin{aligned} (l_a + v_a) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivA} = -31,1656 \text{ m} \\ (l_a + v_a) - (l_b + v_b) &= H_{nivB} - H_{nivE} = 1,3638 \text{ m} \\ (l_d + v_d) - (l_c + v_c) &= H_{nivD} - H_{nivA} = 84,7177 \text{ m} \\ (l_e + v_e) - (l_c + v_c) &= H_{nivC} - H_{nivE} = 4,7967 \text{ m} \end{aligned}$$

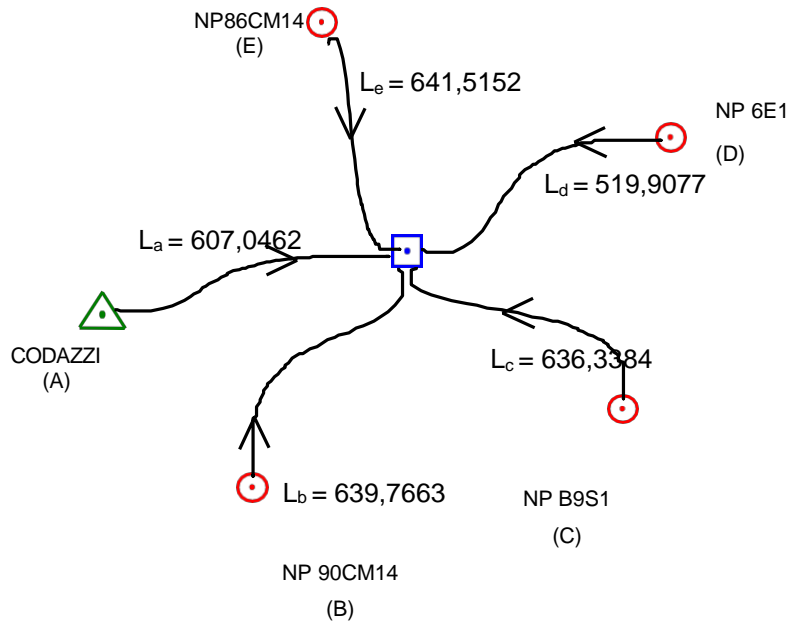


Figura 4. Representación esquemática de la determinación de la altura snmm para un punto a partir de datos GNSS (Caso 1).

Planteamiento de las matrices:

B = $b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

P = $p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto la matriz P es idéntica.

C = $c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} -31,1656 \\ 1,3638 \\ 84,7177 \\ 4,7967 \end{vmatrix}$$

L = $l_{m,1}$: Vector de las observaciones.

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} 607,0459 \\ 639,7663 \\ 636,3384 \\ 519,9077 \\ 641,5152 \end{vmatrix}$$

Solución:

Una vez planteadas las matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$\mathbf{BV} + \mathbf{W} = 0$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{W}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C} - \mathbf{BL}$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} -1,5329 \\ 0,34522 \\ 0,34022 \\ 0,88762 \\ -0,03988 \end{vmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $L^* = L + V$:

$$L^* = \begin{pmatrix} 605,5130 \\ 640,1115 \\ 636,6786 \\ 520,7953 \\ 641,4753 \end{pmatrix}$$

e. Determinación de la altura snmm final:

La altura snmm proveniente de datos GNSS para el punto TG13 será igual a la altura nivelada de cualquiera de los puntos considerados más su correspondiente diferencia ajustada:

$$H_{GNSS\ TG13} = H_{niv\ CODAZZI} + L^*_A = 2588,5523 + 605,5130 = 3194,0653$$

$$H_{GNSS\ TG13} = H_{niv\ 90CM14} + L^*_B = 2553,9538 + 640,1115 = 3194,0653$$

$$H_{GNSS\ TG13} = H_{niv\ B9S1} + L^*_C = 2557,3867 + 636,6786 = 3194,0653$$

$$H_{GNSS\ TG13} = H_{niv\ 6E1} + L^*_D = 2673,2700 + 520,7953 = 3194,0653$$

$$H_{GNSS\ TG13} = H_{niv\ 86CM14} + L^*_E = 2552,5900 + 641,4753 = 3194,0653$$

Caso 2. PERFIL: Determinación de alturas snmm para una serie de puntos dispuestos a lo largo de un perfil a partir de información GNSS y el modelo geoidal GEOCOL (vigente).

Se quiere determinar la altura snmm a partir de información GNSS de los puntos B70NW1, B72NW1, B75NW1, A76NW1, B78NW1 y B86NW1, utilizando las alturas niveladas de los NPs A68NW1 y B88NW1. Las coordenadas MAGNA-SIRGAS de éstos ya han sido calculadas y ajustadas. Las diferentes alturas de cada punto se ilustran en la tabla 3.

Tabla 3. Alturas elipsoidales, geoidales y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura snmm para puntos contenidos en un perfil a partir de datos GNSS (Caso 2).

Punto	Altura elipsoidal (h)	Altura GEOCOL (N)	Altura nivelada
NP A68NW1 Base	1520,9080 m	23,1217 m	1502,2687 m
NP B70NW1	1424,8843 m	23,1191 m	A determinar
NP B72NW1	1171,8970 m	23,1193 m	A determinar
NP B75NW1	997,0633 m	23,1102 m	A determinar
NP A76NW1	1071,1215 m	23,1076 m	A determinar
NP B78NW1	1252,3064 m	23,1025 m	A determinar
NP B86NW1	805,4677 m	23,0916 m	A determinar
NP B88NW1	626,1350 m	22,8113 m	608,3497 m

- Determinación de las diferencias entre las alturas elipsoidales de la base (h_{Base}) y sus rover (h_{Ri}) correspondientes: $\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base}$ (tabla 4).
- Determinación de las diferencias de alturas geoidales entre la base (N_{Base}) y sus rover (N_{Ri}) correspondientes: $\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base}$ (tabla 4).
- Determinación de las diferencias de alturas snmm provenientes de datos GNSS (ΔH_{GNSSi}) entre la base y sus rover correspondientes: $\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$ (tabla 4).

Tabla 4. Alturas relativas elipsoidal, geoidal y nivelada de las estaciones consideradas en la determinación de la altura sobre el nivel medio del mar a partir de datos GNSS para puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

Estaciones	$\Delta h_i = h_{Ri} - h_{Base}$	$\Delta N_i = N_{Ri} - N_{Base}$	$\Delta H_{GNSSi} = \Delta h_i - \Delta N_i$
B70NW1 - A68NW1	-96,0237 m	-0,0260 m	-96,2110 m
B72NW1 - A68NW1	-349,1100 m	-0,0240 m	-349,0086 m
B75NW1 - A68NW1	-523,8447 m	-0,0024 m	-523,8423 m
A76NW1 - A68NW1	-449,7865 m	-0,0141 m	-449,7724 m
B78NW1 - A68NW1	-268,6016 m	-0,0192 m	-268,5824 m
B86NW1 - A68NW1	-715,4403 m	-0,0301 m	-715,4102 m
B88NW1 - A68NW1	-894,7730 m	-0,3104 m	-894,4626 m

- Cálculo de las alturas snmm derivadas de datos GNSS iniciales (H°_{GNSSi}) para los puntos desconocidos: $H^{\circ}_{GNSSi} = H_{Base} + \Delta H_i$ (tabla 5).
- Determinación de las diferencias de alturas snmm iniciales (H°_{GNSSi}) entre estaciones consecutivas: $\Delta H^{\circ}_{GNSS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1}$ (tabla 5).

Tabla 5. Alturas snmm derivadas de datos GNSS y sus diferencias relativas (Caso 2)

Punto	Altura snmm GNSS inicial (H°_{GNSSi})	$\Delta H^{\circ}_{GNSS} = \Delta H_i - \Delta H_{i-1}$
NP A68NW1 Base	1502,26867 m	
NP B70NW1	1406,05767 m	-96,2110 m
NP B72NW1	1153,26007 m	-252,7976 m
NP B75NW1	978,42637 m	-174,8337 m
NP A76NW1	1052,49627 m	74,0699 m
NP B78NW1	1233,68627 m	181,1900 m
NP B86NW1	786,85847 m	-446,8278 m
NP B88NW1	607,80607 m	-179,0524 m

Una vez determinadas las alturas relativas entre los diferentes puntos, el problema se representa esquemáticamente (figura 5) para facilitar el diseño del ajuste por mínimos cuadrados.

- f. Ajuste por mínimos cuadrados de ΔH°_{GNSS} de acuerdo con el modelo matemático del método correlativo:

Ecuaciones de condición:

$$-(l_a + v_a) - (l_b + v_b) - (l_c + v_c) + (l_d + v_d) + (l_e + v_e) - (l_f + v_f) - (l_g + v_g) = H_{B88NW1} - H_{A68NW1}$$

$$H_{B88NW1} - H_{A68NW1} = 608,3497 - 1502,2687 = -893,919 \text{ m}$$

Planteamiento de las matrices:

B = $b_{m,n}$: Matriz de los coeficientes de las observaciones en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

P = $p_{n,n}$: Matriz de los pesos de las observaciones. En este caso se considera que las observaciones fueron realizadas bajo condiciones iguales, por lo tanto la matriz P es idéntica.

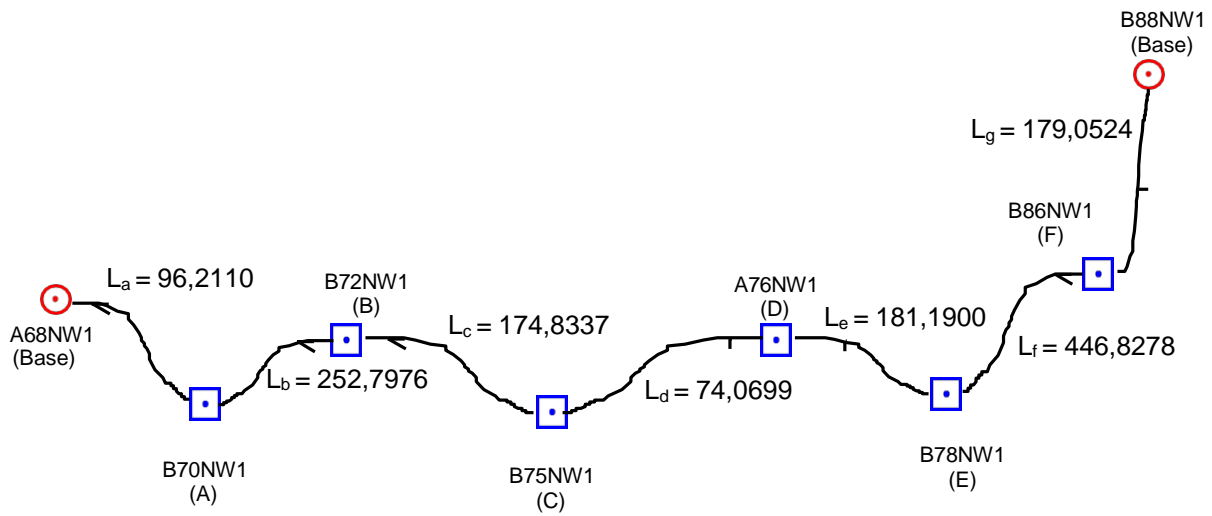
C = $c_{m,1}$: Vector de los términos independientes en las ecuaciones de condición.

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} -893,919 \end{vmatrix}$$

$L = l_{m,1}$: Vector de las observaciones.

$$L = \begin{pmatrix} 96,2110 \\ 252,7976 \\ 174,8337 \\ 74,0699 \\ 181,1900 \\ 446,8278 \\ 179,0524 \end{pmatrix}$$

Figura 5. Representación esquemática de la determinación de la altura snmm derivada de datos GNSS para puntos contenidos en un perfil (Caso 2).



Solución:

Una vez planteadas las matrices se desarrollan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{BV} + \mathbf{W} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{V} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{BP}^{-1} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{W} \\ \mathbf{W} &= \mathbf{C} - \mathbf{BL} \end{aligned}$$

Así, se obtienen las desviaciones (v_i) de las observaciones realizadas.

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -0,07755 \\ -0,07755 \\ -0,07755 \\ 0,07755 \\ 0,07755 \\ -0,07755 \\ -0,07755 \end{pmatrix}$$

Las observaciones corregidas corresponden con: $\mathbf{L}^* = \mathbf{L} + \mathbf{V}$:

$$\mathbf{L}^* = \begin{pmatrix} 96,1335 \\ 252,7200 \\ 174,7560 \\ 74,1475 \\ 181,2680 \\ 446,7500 \\ 178,9750 \end{pmatrix}$$

g. Determinación de las alturas snmm para los puntos nuevos (tabla 6):

$$H_{\text{GNSS-Final}} = H_{\text{Nivelada de la base}} + \Delta H_{i \text{ Ajustado}}$$

Tabla 6. Alturas snmm derivadas de datos GNSS para los puntos contenidos en un perfil (Caso 2).

Punto	$\Delta H_{i \text{ Ajustado}}$	$H_{\text{GNSS-Final}}$
NP A68NW1 Base		1502,2687 m
NP B70NW1	-96,1335 m	1406,1352 m
NP B72NW1	-252,7200 m	1153,4152 m
NP B75NW1	-174,7560 m	978,6592 m
NP A76NW1	74,1475 m	1052,8067 m
NP B78NW1	181,2680 m	1234,0747 m
NP B86NW1	-446,7500 m	787,3247 m
NP B88NW1	-178,9750 m	608,3497 m